

## CHUYÊN NGÀNH THẠC SĨ CÔNG NGHỆ VẬT LIÊU

### Giới thiệu

Mặc dù trong thực tế vật liệu luôn có tính nhớt, nên việc nghiên cứu chuyển động của vật liệu lý tưởng (bỏ qua nhớt) vẫn có một vị trí quan trọng vì những lý do sau:

1. Khi vật liệu chuyển động với  $Re > 1$ , miền nhớt của tính nhớt chỉ tồn tại trong một lớp mỏng sát biên, còn gọi là lớp biên (xem chương lý thuyết lớp biên). Ngoài vùng lớp biên, nhớt của tính nhớt gần như chuyển động của các phần tử vật liệu là rất nhỏ, khi đó ta có thể xem dòng vật liệu chuyển động như vật liệu lý tưởng.

2. Lý thuyết về chuyển động của vật liệu lý tưởng có thể áp dụng cho chuyển động của vật liệu thực, hay vật liệu chuyển động có vận tốc lớn vì khi đó số  $Re$  sẽ lớn, tính nhớt sẽ gần như ít ảnh hưởng.

3. Khi giả thuyết vật liệu có nhớt bằng 0 các phương trình vi phân chuyển động sẽ có dạng đơn giản hơn, giúp ta có thể tìm kiếm các cách đơn giản hơn. Các kết quả tính toán này có thể sử dụng để kiểm nghiệm các mô hình tính toán số học áp dụng trong thực tế trên các máy tính vào các hệ thống thực nghiệm.

Ngoài ra còn có vật liệu đặc biệt có nhớt bằng 0 khi nhiệt độ gần như 0 K ví dụ HELIUM, khi nhiệt độ gần 2.17°K thì nhớt gần như bằng 0 – gọi là Siêu vật liệu.

Các lý thuyết về chuyển động của vật liệu lý tưởng có thể áp dụng trong các lĩnh vực như: khí động, chuyển động sóng...

Trong chương này ta tập trung nghiên cứu dòng vật liệu lý tưởng trong giả thiết nhớt không quay (còn gọi là chuyển động có thể), phụ thuộc hai tham số nguyên không gian (bài toán phẳng), vật liệu không nén được.

### I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN:

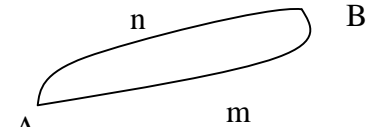
## 1. Hàm thế và trường thế :

### 1.1 Định nghĩa dòng có thế, hàm thế và trường thế :

Trong cơ học ta có khái niệm trường thế : trường thế cấp 1 là có thế khi công của nó khi di chuyển một phần tử từ điểm A đến điểm B không phụ thuộc vào đường đi mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối. Vậy ta có thể viết:

$$W = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

**Ví dụ :** Trường trọng lực là một trường thế.



Khái quát hơn, một trường vectơ  $\vec{A}$  cấp 1 là có thế khi giá trị  $\int_A^B \vec{A} \cdot d\vec{s}$  chỉ phụ thuộc A, B mà không phụ thuộc vào đường cong lấy tích phân. Điều này cũng áp dụng cho trường hợp vectơ  $\vec{u}$ .

Mặt khác, trong toán học ta đã biết,  $\int_A^B \vec{u} \cdot d\vec{s}$  chỉ phụ thuộc điểm đầu điểm cuối mà không phụ thuộc đường đi thì hàm dưới tích phân phải là vi phân toàn phần của một hàm nào đó:

$$\int_A^B \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A \quad (6.1)$$

Hàm  $\varphi$  như thế cấp 1 là hàm thế và dòng chảy cấp 1 là có thế.

Vì thế (6.1) theo các thành phần vectơ ta có:

$$\begin{aligned} \int_A^B \vec{u} \cdot d\vec{s} &= \int_A^B (u_x dx + u_y dy + u_z dz) \\ &= \int_A^B d\varphi = \int_A^B \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

So sánh các thành phần tương ứng trong hai tích phân của (2) ta có:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} ; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} ; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (6.3)$$

Hay:

$$\vec{u} = \vec{\nabla} \varphi$$

Trong hệ tọa độ trụ

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (6.4)$$

Vậy, dòng chảy có thể là có thể khi tìm được hàm  $\varphi$  sao cho các thành phần vận tốc của vectơ vận tốc tại mỗi điểm nào đó xác định theo các hàm riêng của  $\varphi$  theo (3) trong hệ tọa độ trụ và theo (4) trong hệ tọa độ trụ.

Trong hệ bài toán phẳng, các thông số của dòng chảy chỉ còn phụ thuộc vào hai tọa độ không gian  $x$  và  $y$ .

## 1.2. Điều kiện dòng chảy là có thể :

Khi dòng chảy là có thể, ta luôn có:  $\text{rot}(\vec{u}) = \text{rot}(\text{grad} \varphi) = 0$ . Vậy dòng chảy có thể luôn là dòng không quay. Ta hoàn toàn có thể chứng minh rằng mọi dòng không quay, tức là thoả mãn  $\text{rot}(\vec{u}) = 0$ ,  $\vec{u}$  là dòng có thể.

## 1.3. Tính chất của hàm thế vận tốc:

Phương trình liên tục cho lưu chất không nén được có dạng:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (6.5)$$

Thay (3) vào (5) ta nhận được:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0$$

$$\text{Hay} \quad \nabla^2 \varphi = 0 \quad (6.6)$$

Phương trình (6.6) cho ta thấy rằng hàm thế vận tốc thoả mãn phương trình Laplace, phương trình vi phân của hàm riêng tuyến tính.

## 1.4. Dòng chảy thế :

Dòng chảy thế có giá trị  $\varphi = \text{const}$ , khi đó phương trình dòng chảy có dạng  $d\varphi = 0$

Hay:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0 \quad (6.7)$$

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = 0 \quad (6.8)$$

### 1.5. Ý nghĩa vật lý của hàm thế vô hướng:

Ta có:

$$\begin{aligned} \int_A^B d\phi &= \int_A^B (u_x dx + u_y dy + u_z dz) \\ &= \int_{A \rightarrow B} u d\vec{s} = \Gamma_{AB} = \phi_B - \phi_A \end{aligned} \quad (6.9)$$

Vậy hiệu giá trị hai hàm thế khi qua hai điểm A, B bất kỳ bằng hiệu của các thế tại hai điểm đó, không phụ thuộc đường đi.

## 2. Hàm dòng (hàm lưu lượng) - dòng.

### 2.1. Khái niệm về dòng:

Đối với dòng chảy phẳng không nén được, phương trình liên tục có dạng:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (6.10)$$

(6.10) luôn cho ta thấy luôn tồn tại một hàm  $\psi$  sao cho:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (\text{trong hệ tọa độ vuông góc}). \quad (11)$$

(thế vào, nếu thay các thành phần vô hướng vào (6.10), ta có (6.10) luôn thỏa mãn).

Hàm  $\psi$  cũng gọi là hàm dòng hay hàm lưu lượng.

Vậy: tồn tại hàm dòng cho mọi dòng chảy hai chiều, không phụ thuộc vào điều kiện dòng có quay hay không.

Trong hệ tọa độ cực:

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

### 2.2. Hàm dòng trong dòng thế phẳng:

Trong dòng thế phẳng ta có:

$$\text{Rot}(\vec{u}) = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.12)$$

Th 6.11 vào 6.12 ta nhận được:

$$\Delta\psi = 0 \quad (6.13)$$

Vậy trong dòng thế phẳng các nghiệm hàm thế, hàm dòng  $\psi$  thỏa mãn phương trình Laplace.

### 2.3. Quan hệ giữa $\psi = \text{Const}$ và đường dòng

Phương trình có  $\psi = \text{Const}$  là  $d\psi=0$ , hay có dạng:

$$-u_y dx + u_x dy = 0 \quad (6.14)$$

Hay

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi = \frac{u_y}{u_x} \quad (6.15)$$

Pt (6.15) chính là phương trình đường dòng. Vậy các đường cong có  $\psi = \text{Const}$  chính là các đường dòng.

### 2.4. Ý nghĩa vật lý của hàm dòng:

Xét dòng chảy giữa hai đường dòng  $C_1$  và  $C_2$ .  $\vec{u}$  là vận tốc tại điểm M. N là A và B bằng mặt cong nào đó. Lưu lượng thế tích trong đường dòng là:

$$q = \int_{AMB} \vec{u} \cdot \vec{n} \cdot ds = \int_{AMB} (u_x dy - u_y dx) = \int_{AMB} d\Psi = \Psi_A - \Psi_B \quad (6.16)$$

Vậy: hiệu giá trị hàm dòng giữa hai điểm bằng lưu lượng qua đường giới hạn hai điểm qua hai điểm đó.

**Ví dụ:**

Dòng chảy phẳng và các hàm dòng

Cho dòng chảy phẳng có  $\psi(x,y) = ax^2 + by^2$ , a và b là các hằng số. Nghiên cứu các dòng chảy theo các điều kiện của a và b.

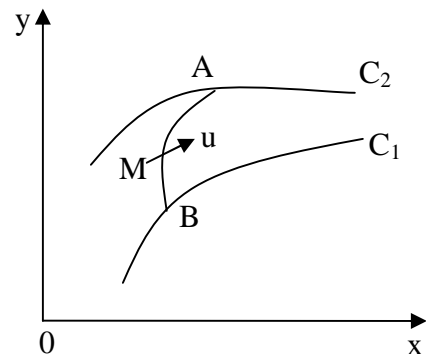
**Giải:**

Ta có:

$$u_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2by; u_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -2ax$$

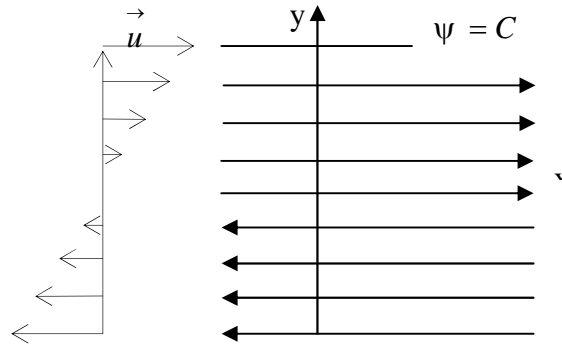
Phương trình đường dòng  $\psi = \text{Const}$ :

$$* \text{Trường hợp } a/b = 0: \psi = by^2$$



Hình 6.1

Đồng chuyển này là đồng chuyển gì a hai b n ph ng song song, d ch chuyển trong hai m t ph ng song song theo ph ng c a hai m t ph ng, v n t c t ng i gi a hai m t ph ng này là U. ng dòng là các ng  $y = \text{Const}$  (hình-6.2).



Hình 6.2

$$* \text{Tr ng h p } a/b = -1: \quad \psi = a(x^2 - y^2) \quad (6.18)$$

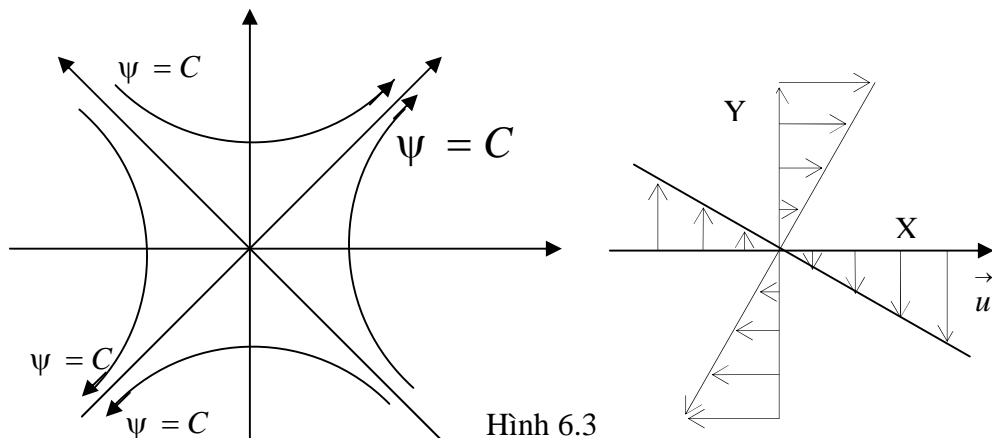
$$u_x = 2by; \quad u_y = 2bx \quad (6.19)$$

$$\text{rot}(\vec{u}) = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (6.20)$$

V y dòng là không quay.

Tr ng v n t c này c c tr ng b i thành ph n kéo dãn dài, kéo các ph n t l u ch t theo h ng dòng chuyển. Ph ng trình ng dòng:

$$\psi = a(x^2 - y^2) = C$$

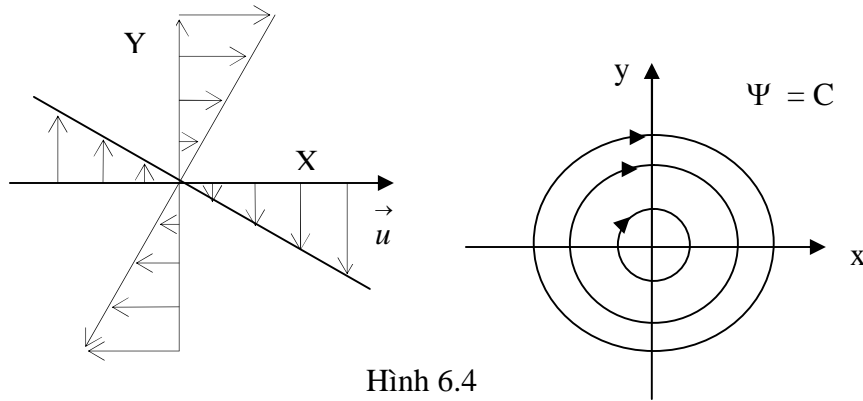


Hình 6.3

$$* \text{Tr ng h p } a/b = 1, \quad \psi = a(x^2 + y^2)$$

$$u_x = 2ay; \quad u_y = -2ax \quad (6.21)$$

$$\text{rot}(\vec{u}) = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -4a \quad (6.22)$$



Hình 6.4

(6.22) cho thấy chuyển động thẳng chuyển động là chuyển động có quay. Các phần tử lưu chất quay quanh trục vuông góc với mặt phẳng XOY, với vận tốc góc  $\vec{\Omega} = -2a$ , các dòng là các đường tròn đồng tâm, phương trình:

$$\psi = a(x^2 + y^2) = C \quad (6.23)$$

\* Trường hợp tổng quát:

$$\Psi = \frac{b+a}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b-a}{2}(y^2 - x^2) = \Psi_{quay} + \Psi_{keo} \quad (6.24)$$

$$u_x = (b+a)y + (b-a)y; u_y = -(b+a)x + (b-a)x \quad (6.25)$$

Chuyển động khi này là tổng hợp của hai chuyển động quay và kéo dãn theo phương dòng chảy.

### 2.5. Vết giao của các đường và các đường thẳng:

Ta biết:

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Thay vào điều kiện trực giao Cosi-Rieman

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0$$

Ta thấy phương trình này tho mãn. Vậy, hai họ đường và đường thẳng giao.

### 3. Nghiên cứu dòng chảy qua hàm thế và hàm dòng - Trường hợp:

Trên ta thấy:

1. Khi biết thế vận tốc hoặc hàm dòng của một dòng chảy ta có thể xác định các trường vận tốc. Bài toán tìm  $\varphi$  và  $\psi$  là gì? phương trình vi phân  $\Delta^2\varphi=0$  hay  $\Delta^2\psi=0$ , sao cho đáp ứng thoả các điều kiện xa vô cùng và điều kiện biên.

\* điều kiện xa vô cùng là trục vận tốc và áp suất nội dòng chảy không chịu ảnh hưởng (hay chịu ảnh hưởng rất nhỏ) của các điểm bất kỳ hay của các vật cản.

\* điều kiện biên: khi trường vận tốc bị giới hạn bởi thành dòng  $\Sigma$ , điều kiện biên cho  $\varphi$  và  $\psi$  là trên biên  $\Sigma$  là:

$$\psi = \text{const và } \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{phương trình là phương pháp tuyến của biên } \Sigma).$$

2. Vì các hàm phương trình  $\varphi$  và  $\psi$  có mô tả bằng các phương trình vi phân của hàm riêng loại tuyến tính (phương trình Laplace), nên có thể chứng minh rằng, có nghĩa là có thể tách hai nghiệm dòng thế phương trình thành một dòng thế mới phức tạp hơn hoặc một chuyển động thế phức tạp có thể phân tích thành hai hay nhiều chuyển động thế đơn giản.

3. Ta có thể nghiên cứu dòng thế phương trình trực tiếp qua hàm dòng và hàm thế, hoặc dùng kết quả về hàm thế phức.

Khái niệm về thế phức: vì hàm  $\varphi$  và  $\psi$  đều thoả mãn phương trình Laplace, nên theo lý thuyết hàm biến phức, ta có thể xây dựng một hàm biến phức  $W(z)$  sao  $W(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ , trong đó  $z$  là biến số phức ( $z = x + iy$  hay  $z = re^{i\theta}$ ,  $W(z)$  cũng là thế phức của dòng chảy. khi đó, dòng chảy sẽ nghiên cứu trực tiếp theo  $W(z)$ .

Sau đây, ta nghiên cứu một số chuyển động đơn giản và chuyển động tổng hợp.

## **II. CÁC TRƯỜNG HỢP CHUYỂN ĐỘNG THẲNG GIẢN:**

### **1. Chuyển động thẳng đều:**

Cho dòng chảy có vận tốc  $U = \text{Const}$  tạo với trục  $x$  một góc  $\alpha$ .

Xác định thế vận tốc và hàm dòng của dòng chảy ta có:

$$u_x = U\cos\alpha; u_y = U\sin\alpha \quad (6.26)$$

$$d\psi = u_x dy - u_y dx$$

$$\Psi = \int u_x dy - \int u_y dx + C = Uy\cos\alpha - Ux\sin\alpha + C \quad (6.27)$$

Chọn gốc dòng qua tâm  $O$  có  $\psi = 0$ , vậy  $C=0$ , khi đó:



$$\psi = U(y\cos\alpha - x\sin\alpha) \quad (6.28)$$

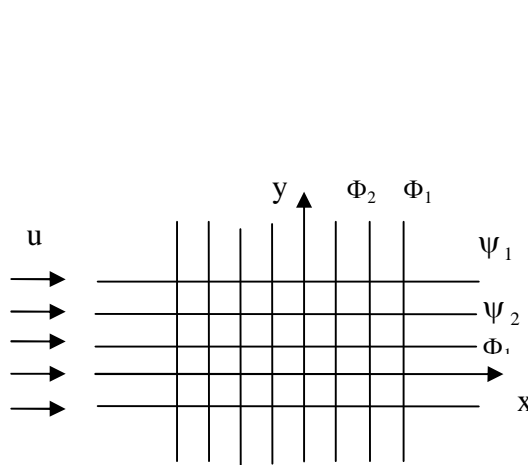
$$\delta\varphi = v\xi\delta\xi + v\psi\delta\psi \quad (6.29)$$

$$\varphi = \int u_x dx + \int u_y dy + C = Ux\cos\alpha + Uy\sin\alpha + C$$

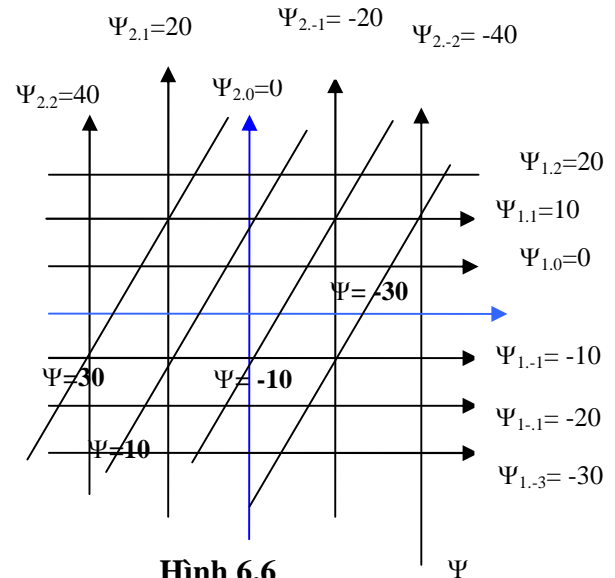
Chọn gốc tọa độ qua tâm O có  $\varphi = 0$ , và  $C = 0$ , khi đó

$$\varphi = U(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$$

Khi  $\alpha = 0$ , hình dạng và phương trình có dạng hình như Hình 2.1



Hình 6.5



Hình 6.6

Theo hàm thế phức:

Hàm thế phức của dòng song phẳng có dạng:

$$W(z) = a.z$$

Trong đó, n u liên hệ giữa a và vận tốc dòng chảy, ta có

$$A = U\cos\alpha - iU\sin\alpha$$

$$W(z) = (U\cos\alpha - iU\sin\alpha).z \quad (6.30)$$

Phân tích phần thực và phần ảo của  $W(z)$  ta có:

$$\begin{aligned} W(z) &= (U\cos\alpha - iU\sin\alpha).(x + iy) \\ &= (U\cos\alpha.x + U\sin\alpha.y) + i(U\cos\alpha.y - U\sin\alpha.x) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta biết  $W(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ , và y:

$$\varphi = (U\cos\alpha.x + U\sin\alpha.y), \quad \psi = (U\cos\alpha.y - U\sin\alpha.x) \quad (6.31)$$

Các biểu thức (6.28), (6.29) hoàn toàn trùng với (6.30)

**Ví dụ:** Dòng chảy có  $u_x=10\text{m/s}$ ,  $u_y=20\text{m/s}$ . Xác định hàm dòng và vẽ hình dòng.

### **Giải**

Theo 6.28 ta có  $\psi = u_x \cdot y - u_y \cdot x = 10y - 20x = \psi_1 + \psi_2$  (theo nguyên tắc chồng chất).  $\psi_1$  là các đường  $x = \text{Const}$ ,  $\psi_2$  là các đường  $y = \text{Const}$ . Hình các dòng thành phần  $\psi_1, \psi_2$  và hình dòng tổng  $\psi$  trình bày trên hình 2.2

## **2. Dòng lưu lượng, dòng hút (giới thiệu):**

Tìm điểm trong trường vận tốc dòng chảy có một nguồn lưu lượng ra vào tất cả mọi phía, vì lưu lượng không đổi, điểm này cũng gọi là điểm nguồn. Trường vận tốc liên tục tại điểm này, ngược lại ta gọi là điểm hút, hay điểm giếng.

Các điểm nguồn hút là lưu lượng tích cực âm, hút trên bề mặt là liên tục. Điểm nguồn cũng đồng nghĩa, điểm hút có các đặc điểm.

**Hàm dòng và hàm thế của nguồn, hút:** Nếu lưu lượng tại điểm nguồn tỏa ra mọi phía lưu lượng không đổi, vận tốc mọi phía, dòng chảy lúc này chỉ thành phần theo phương kính  $v_r$ , còn thành phần vận tốc vòng  $v_\theta$  bằng 0, khi đó, vận tốc  $v_r$  tại điểm cách tâm  $O$  ở  $r$  tính theo công thức sau:

$$v_r = q/2\pi r \quad (6.32)$$

Do vậy, hàm dòng cũng xác định như sau (trong hệ tọa độ cực):

$$d\psi = r v_r d\theta - v_\theta dr = r(q/2\pi r) \cdot d\theta \quad (6.33)$$

$$\psi = \theta \cdot q/2\pi + \text{Const}$$

Lấy điều kiện  $\psi = 0$  khi  $\theta = 0$ , ta có:  $\psi = \theta \cdot q/2\pi$

Vì trong hệ tọa độ cực:  $\psi = q/2\pi \arctg(y/x)$

Hàm thế cũng xác định như sau:

$$d\phi = v_r dr + r v_\theta d\theta \quad (6.34)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{q}{2\pi} \ln r = \frac{q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2)$$

Vậy hàm dòng và hàm thế của điểm nguồn, hút như sau:

$$\phi = \pm \frac{q}{2\pi} \ln r = \pm \frac{q}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \quad (6.35)$$

$$\psi = \pm \frac{q}{2\pi} \theta = \pm \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} \quad (6.36)$$

trong đó, dấu (+) dùng cho dòng điện nguồn và dấu (-) dùng cho dòng điện hút.

Phương trình hình học dòng là các đường thẳng qua tâm với góc  $\theta$  khác nhau, còn đường đẳng thế là các đường tròn đồng tâm O (hình 2.3).

Khi dòng điện nguồn và dòng điện hút  $M(x_0, y_0)$  bất kỳ, thì vận tốc và hàm dòng có dạng:

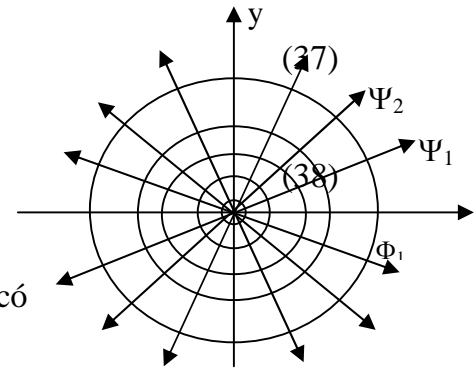
$$\varphi = \pm \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\psi = \pm \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Theo hàm thế phức:

Hàm thế phức của dòng điện nguồn (hút) tại điểm  $Z_0$  có dạng:

$$w(z) = \pm \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0)$$



Hình 6.7

(6.39a)

Tách phần thực và phần ảo của (6.39) ta có nghiệm của hàm  $\varphi$  theo (6.37) và hàm  $\psi$  theo (6.38).

### 3. Xoáy tảo:

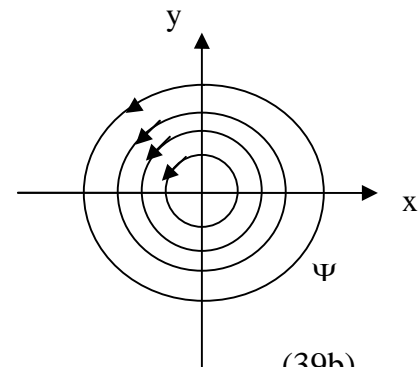
Xét dòng chảy bao quanh tâm O sao cho lưu lượng theo một vòng cong bất kỳ bao tâm điểm O là không thay đổi, có nghĩa là:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l} = C$$

$\Gamma > 0$  nghĩa là chiều quay ngược chiều kim đồng hồ. Dòng chảy này gọi là dòng xoáy tảo.

Vận tốc dòng chảy theo phương  $r$  khi này bằng không  $v_r = 0$ , vận tốc theo phương vòng - tiếp tuyến là hàm  $\theta$  tại mỗi điểm trên vòng tròn cách tâm là không đổi và tính như sau:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (6.40)$$



Hình 6.9

(39b)

Thay các thành phần vận tốc vào (6.33) và (6.34) và tích phân lên, ta nhận được hàm dòng và hàm thế của xoáy tít do có dạng như sau:

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) \quad (6.41)$$

$$\varphi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} \quad (6.42)$$

Khi điểm xoáy tít tại M có tọa độ  $(x_0, y_0)$ , hàm dòng và hàm thế có dạng:

$$\Psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \ln((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \quad (6.43)$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (6.44)$$

Hàm thế phức của xoáy tít có dạng:

$$W(z) = \pm \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad (6.45)$$

Dấu (+) khi dòng quay theo chiều kim đồng hồ. Lưu ý rằng dòng chảy tạo bởi xoáy tít do là dòng thế thì điểm M  $(x_0, y_0)$  là điểm xoáy tít. Thế vậy, do vectơ xoáy trong hình thức trong trường hợp này có dạng:

$$\vec{rot} u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_\theta) - \frac{\partial V_r}{r \partial \theta}$$

Mà theo (6.40)

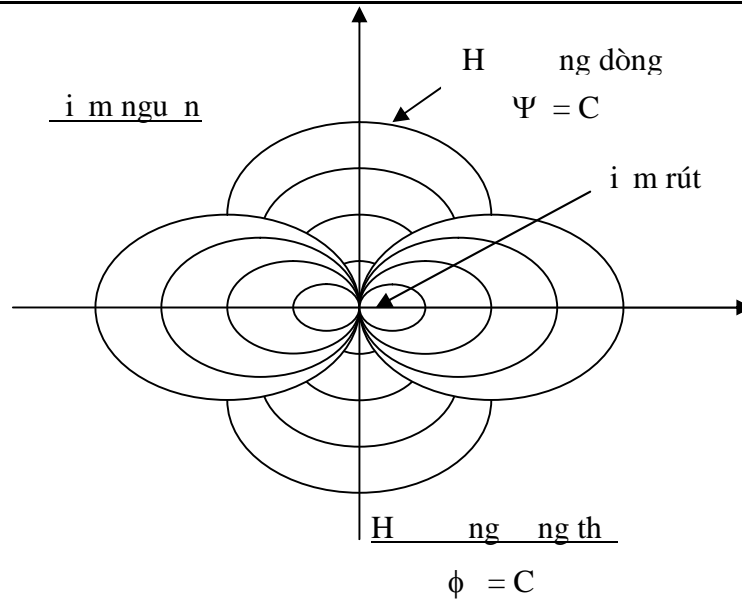
$$r v_\theta = \text{Const} = \Gamma \quad \text{và} \quad V_r = 0$$

#### **4. Lưu lượng (cặp điểm nguồn - điểm hút hoặc cặp hai xoáy ngược chiều)**

##### **4.1. Khái niệm:**

Xét chuyển động của điểm bất động và điểm xoáy cùng chiều, đặt trên trục x, cách nhau một khoảng  $e$ . Dòng chảy tạo bởi cặp điểm này có hàm dòng và hàm thế xác định như sau:

$$\Psi = \Psi_n + \Psi_h = \frac{q\theta_n}{2\pi} - \frac{q\theta_h}{2\pi} = \left( \frac{q}{2\pi} \right) \left( \frac{\theta_n}{\theta_h} \right) \quad (6.46)$$



Hình 6.10

$$\varphi = \varphi_n + \varphi_h = \left( \frac{q}{2\pi} \right) \ln r_n - \left( \frac{q}{2\pi} \right) \ln r_h = \left( \frac{q}{2\pi} \right) (\ln r_n - \ln r_h) \quad (6.47)$$

Trong đó:

$$\theta_n = \arctg \left( \frac{x + \frac{e}{2}}{y} \right), \theta_h = \arctg \left( \frac{x - \frac{e}{2}}{y} \right) \quad (6.48)$$

$$r_n = \sqrt{\left( x + \frac{e}{2} \right)^2 + y^2}, r_h = \sqrt{\left( x - \frac{e}{2} \right)^2 + y^2} \quad (6.49)$$

Chuyển động của các hạt là chuyển động của các hạt tích điện dương và âm cách nhau một khoảng  $\varepsilon$ , có cùng điện tích  $q$  sao cho  $\varepsilon \cdot q \rightarrow m_0$  hữu hạn khi  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $m_0$  là điện tích hay mô men lưỡng cực.

Từ (6.46) ta viết lại hàm thế của chuyển động của các hạt sau:

$$\begin{aligned} \varphi &= \lim_{\substack{e \rightarrow 0 \\ qe \rightarrow m_0}} \left( \frac{q}{2\pi} \right) (\ln r_n - \ln r_h) = \lim_{\substack{e \rightarrow 0 \\ qe \rightarrow m_0}} \frac{q}{4\pi} \ln \frac{x + (e/2)^2 + y^2}{x - (e/2)^2 + y^2} \\ &= \lim_{\substack{e \rightarrow 0 \\ qe \rightarrow m_0}} \frac{q}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{2ex}{x - (e/2)^2 + y^2} \right) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Mở khai theo khai triển chuỗi, khi  $x$  là vế cùng bé ta có:

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + \dots$$

Bỏ qua các số hạng vô cùng bé bậc cao, ta nhận được (6.50) dưới dạng sau:

$$\begin{aligned}\varphi &= \lim_{\substack{e \rightarrow 0 \\ qe \rightarrow m_0}} \frac{q}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{2ex}{x - (e/2)^2 + y^2} \right) \\ &= \lim_{\substack{e \rightarrow 0 \\ qe \rightarrow m_0}} \frac{q}{2\pi} \frac{ex}{x - (e/2)^2 + y^2}\end{aligned}\quad (6.51)$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{m_0}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (6.52)$$

Không khó khăn gì ta có thể chứng minh hàm dòng có dạng:

$$\Psi = \frac{m_0}{2\pi} \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (6.53)$$

Trong hình toạ độ các hàm thế và hàm dòng có dạng sau:

$$\varphi = \frac{m_0 \cos \theta}{2\pi r}, \Psi = -\frac{m_0 \sin \theta}{2\pi r} \quad (6.54)$$

Hàm thế phức mô tả chuyển động thẳng của các có dạng:

$$W(z) = \frac{m_0}{2\pi} \frac{1}{z} \quad (6.55)$$

Trên hình 2.5 trình bày hình các đường dòng và các đường thế của chuyển động thẳng.

### **III. CHUYỂN ĐỘNG NHỊP NHỊ U CHUYỂN ĐỘNG THẲNG.**

Trên đây ta đã nghiên cứu một số chuyển động thẳng đều. Trong hình vẽ của chuyển động thẳng đều này sẽ cho ta hiểu được chuyển động phức tạp hơn và có ý nghĩa áp dụng thực tế.

#### **1. Chuyển động quanh các thể rắn Rankine**

Xét chuyển động của chất lỏng nhớt ba chuyển động sau: chuyển động đều theo phương x với vận tốc  $U_0$ , chuyển động do điểm nguồn tại  $O_1(-a, 0)$ , điểm hút tại  $O_2(a, 0)$ , các đường dòng và hút vào bằng  $q$ .

Hàm thế và hàm dòng của chuyển động thẳng đều có dạng:

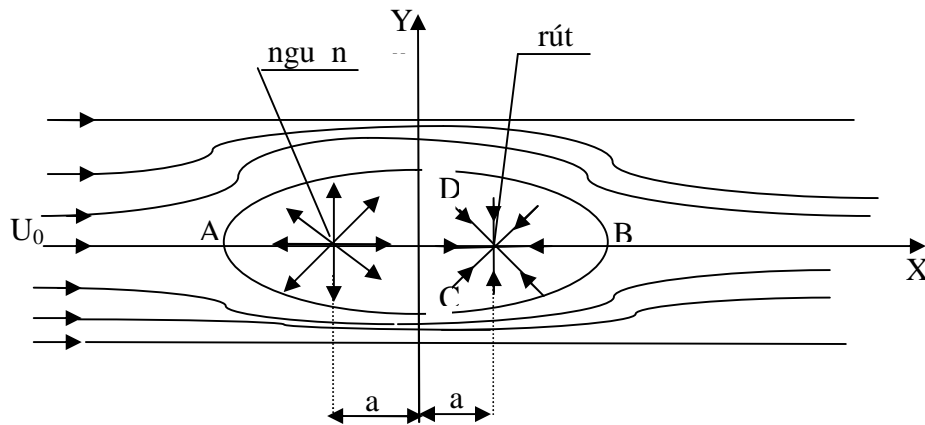
$$\varphi = u_0 x + \frac{q}{4\pi} \ln[(x+a)^2 + y^2] - \frac{q}{4\pi} \ln[(x-a)^2 + y^2] \quad (6.56)$$

$$\psi = u_o y + \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x+a} - \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x-a} \quad (6.57)$$

Trong ó, s h ng u tiên c a hàm th và hàm dòng là do dòng chuyển n ng u, s h ng th hai là do ngu n, s h ng th ba là do hút.

Trên hình 3.1 trình bày h các ng dòng  $\psi = \text{Const}$ . Ta nh n th y ng dòng không ng v i  $\psi = 0$  g m ng  $y = 0$  và m t ng cong kín, ph ng trình ng cong là:

$$\psi = u_o y + \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x+a} - \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x-a} = 0 \quad (6.58)$$



Hình 6.11

Ngoài ra các i m A và B có v n t c  $v_{AX} = v_{BX} = 0$ , các i m C và D có v n t c theo ph ng y,  $v_{DY} = v_{CY} = 0$ . Vì ng dòng không là ng cong kín, nên ta th y ph n dòng ch y phía trong và ngoài ng dòng không có s giao l u v i nhau. Dòng ch y khi này g i ng nh do m t chuyển n ng u bao quanh m t v t có hình d ng ng dòng không, mà c g i là c th d ng Rankin.

## 2. Dòng ch y bao tr tròn:

Xét chuyển n ng t ng h p c a hai chuyển n ng: chuyển n ng u và chuyển n ng l ng c c. Hàm th và hàm dòng c a chuyển n ng t ng h p trong h to c c có d ng sau:

$$\phi = U_o r \cos \theta + \frac{m_o}{2\pi} \frac{1}{r} \cos \theta \quad (6.59a)$$

$$\psi = U_o r \sin \theta - \frac{m_o}{2\pi} \frac{1}{r} \sin \phi \quad (6.59b)$$

Trong ó s h ng u c a v ph i là thành ph n do chuyển ng u, s h ng th hai do chuyển ng l ng c c.

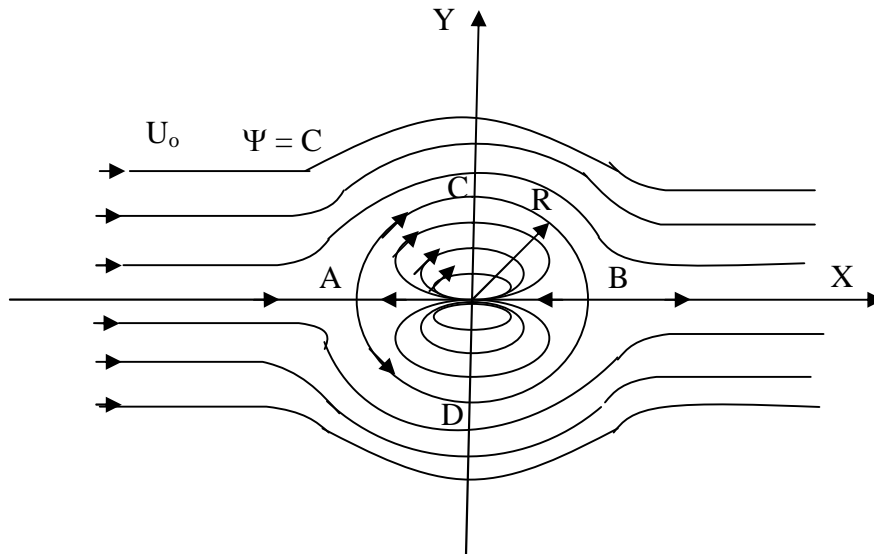
T (6.59) và (6.60) ta có:

$$\phi = U_o r \cos \theta \cdot \left(1 + \frac{m_o}{2\pi U_o} \frac{1}{r^2}\right) \quad (6.60a)$$

$$\psi = U_o r \sin \theta \cdot \left(1 - \frac{m_o}{2\pi U_o} \frac{1}{r^2}\right) \quad (6.60b)$$

Trên hình 6.11 trình bày h các ng dòng  $\psi = \text{Const}$ , trong ó ng dòng  $\psi = 0$  có ph ng trình sau:

$$\psi = U_o r \sin \theta \cdot \left(1 + \frac{m_o}{2\pi U_o} \frac{1}{r^2}\right) = 0 \quad (6.61)$$



Hình 6.11

Ph ng trình (6.61) tho mẫn hai tr ng h p:

1  $\sin \theta = 0$ : các i m trên tr c ox

2  $l = \frac{m_o}{2\pi U_o} \frac{1}{R^2} = 0 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{m_o}{2\pi U_o}}$ : các i m trên ng tròn bán kính R.

V y ng dòng không tr c Ox là ng tròn tâm O bán kính R.



$$R = \sqrt{\frac{m_o}{2\pi U_o}} \quad (6.62)$$

Do không có s trao i l u ch t gi a m i n trong và m i n ngoài ng tròn ng dòng không nên tr ng dòng ch y s hoàn toàn không thay i n u ta t vào v trí ng dòng không m t tr tròn nh n, có bán kính theo (6.62). Vì v y dòng ch y c t o b i m t dòng u và m t l ng c c còn có tên là dòng bao quanh tr tròn không có l u s v n t c.

Hàm th và hàm dòng c vi t l i nh sau:

$$\phi = u_o r \cos \theta . (1 + \frac{R^2}{r^2}) \quad (6.63)$$

$$\psi = u_o r \sin \theta . (1 - \frac{R^2}{r^2}) \quad (6.64)$$

\* Phân b v n t c trên tr tròn bán kính R:

$$u_o = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -2u_o \sin \theta \quad (6.65)$$

V y hai i m A và B v n t c b ng 0  $u_A = u_B = 0$ , c g i là hai i m d ng, t i hai i m C và D có v n t c max:  $u_C = u_D = 2u_o$  (hình 3.2).

\* Phân b áp su t trên tr tròn bán kính r:

Áp d ng ph ng trình Bernoulli cho m t i m xa vô cùng và m t trên tr tròn ta có:

$$p_\infty^* + \rho U_o^2 / 2 = p^* + \rho u^2 / 2 = p^* + 2\rho U_o^2 \sin^2 \theta \quad (6.66)$$

V y

$$\Delta p^* = p^* - p_\infty^* = (\rho U_o^2 / 2) (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (6.67)$$

V i  $p^* = p + \gamma g z$

Th ph c c a dòng bao quanh tr tròn có d ng:

$$W(z) = U_o z + \frac{m_o}{2\pi} \frac{1}{z} = U_o \left( z + \frac{R^2}{z} \right) \quad (6.68)$$

### 3. Chuyển động quanh hình tr tròn quay:

Xét chuyển động t ng h p c a chuyển th ng u, chuyển ng l ng c c và xoáy t do. Th ph c c a chuyển động t ng h p này có d ng:

$$\varphi = U_o r \cos \theta + \frac{m_o}{2\pi} \frac{1}{r} \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (6.69)$$

$$\psi = U_o r \sin \theta - \frac{m_o}{2\pi} \frac{1}{r} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (6.70)$$

Đây cũng là dòng chảy hợp của dòng bao quanh trụ tròn không lượn và mặt xoáy tự do, còn đặc biệt là dòng bao quanh trụ tròn có lượn và mặt xoáy tự do. Kết hợp với (6.63) và (6.64) ta có thể viết (6.69) và (6.70) dưới dạng sau:

$$\varphi = u_o r \cos \theta \cdot \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (6.71)$$

$$\psi = u_o r \sin \theta \cdot \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (6.72)$$

\* Phân bố vận tốc trên trụ tròn bán kính R:

$$u = -2U_o \cdot \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (6.73)$$

Trong (73) ta xác định các vị trí các điểm vận tốc bằng 0 trên trụ tròn có thể hình thành dòng chảy ngược lại. Có ba trường hợp trình bày trên hình 3.3.

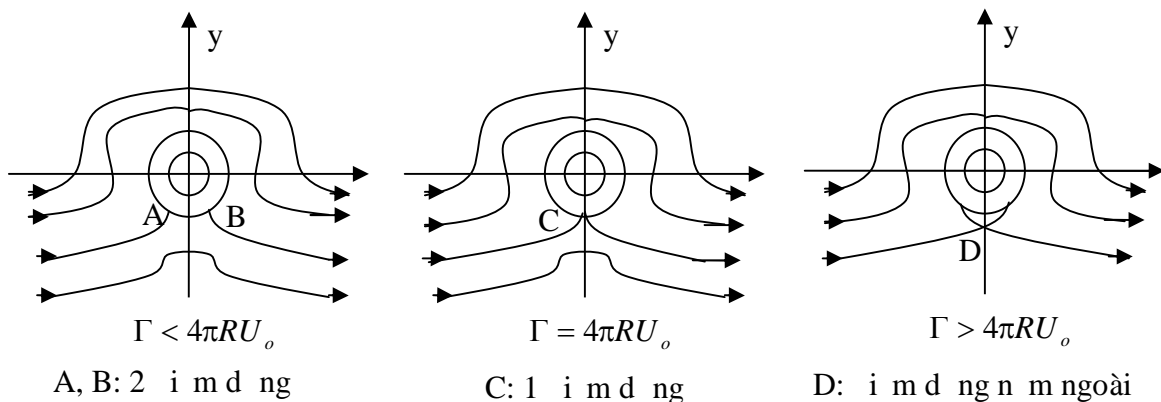
\* Áp suất tại các điểm trên trụ tròn bán kính R:

Áp dụng phương trình Bernoulli cho hai điểm xa vô cùng và trên trụ ta có:

$$p_\infty^* + \rho U_o^2 / 2 = p^* + \rho u^2 / 2 \quad (6.74)$$

Kết hợp với (6.73) ta nhận được:

$$\Delta p^* = p^* - p_\infty^* = \left(\rho U_o^2 / 2\right) \left[1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R U_o}\right)^2\right] \quad (6.75)$$



Hình 6.12

\* Tính lực do dòng chảy tác động lên trụ tròn:

T phân bố áp suất trên trụ tròn theo phương trình (6.75), ta xác định các lực do lưu chất tác động lên trụ tròn theo hai phương trình x và y như sau:

\* Lực theo phương y - lực nâng:

$$\begin{aligned} F_L &= - \int_0^{2\pi} \Delta p^* \cdot R \sin \theta \cdot d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\rho U_o^2}{2} \left( A - 4 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi R U_o} \right) R \sin \theta \cdot d\theta = \rho U_o \Gamma \end{aligned} \quad (6.76a)$$

vì  $A = 1 - \Gamma^2 / 4\pi^2 a^2 U_o^2$ , và lưu ý rằng:  $\int_0^{2\pi} \sin^n \theta \cdot d\theta = 0$  khi n lẻ.

\* Lực theo phương x - lực cản:

$$\begin{aligned} F_D &= - \int_0^{2\pi} \Delta p^* \cdot R \cos \theta \cdot d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\rho U_o^2}{2} \left( A - 4 \sin^2 \theta - \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi R U_o} \right) R \cos \theta \cdot d\theta = 0 \end{aligned} \quad (6.76b)$$

**Nhận xét:** Lực nâng do lưu chất tác động lên trụ tròn phụ thuộc vào cường độ xoáy tảo và vận tốc dòng chảy, có phương vuông góc với vận tốc dòng chảy. Khi  $\Gamma=0$  ta có  $F_L=0$ . Lực cản do lưu chất tác động lên trụ tròn luôn bằng 0. Đây là một trường hợp đặc biệt áp dụng như lý Joukowski và lực nâng cho các thể hình trụ tròn. Hiện tượng này được quan sát trong thực nghiệm, có tên là hiện tượng Magnus.

**nh lý Joukowski và lực nâng:** Khi dòng lưu chất lý tưởng vận tốc  $U_0$  chảy bao quanh thể vật có  $\Gamma$ , sẽ tác động lên thể đó một lực có phương vuông góc với phương  $U_0$ , chiều và độ xác định bằng quay  $U_0$  một góc  $90^\circ$  ngược chiều kim đồng hồ, và giá trị bằng  $\rho U_0 \Gamma$ .

nh lý Joukowski không chỉ áp dụng cho các thể hình trụ tròn mà cho các thể hình dạng bất kỳ. Hiện tượng này được ứng dụng nhiều trong kỹ thuật và đời sống: là nguyên lý cơ bản của các thiết bị bay, nhiều thiết bị làm việc có tận dụng tác dụng của máy và lưu chất...

Thuyết cơ học chất lỏng trong chuyên đề này có dạng:

$$W(z) = U_o \left( z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad (6.77)$$

**Ví dụ :** Một dòng không khí vận tốc 10m/s chảy bao quanh trụ tròn theo phương vuông góc trục trụ. Trụ có bán kính 1.2m và dài 9m quay với vận tốc 210v/ph quanh trục của nó. Giả thiết dòng chảy phẳng. Xác định các đại lượng lý thuyết:

1. Lưu lượng vận tốc bao quanh trụ.
2. Lực nâng tác động lên trụ.
3. Các điểm vận tốc bằng 0 trên mặt trụ.

### Giải

Ta có coi dòng chảy trong trường hợp này thu được dòng bao quanh trụ tròn có lưu lượng vận tốc, trong đó:

$$1-U_0 = 10\text{m/s}$$

2-Thành phần xoáy tự do do tốc độ quay của trụ. Trên mặt trụ vận tốc vòng do xoáy tự do là:

$$V_\theta = \omega.R = \pi.n.R/60 = 3.14 \times 210 \times 1.2/60 = 13.19\text{m/s}$$

Do vậy, lưu lượng vận tốc bao quanh trụ là:

$$\Gamma = 2\pi.V_\theta.R = 2 \times 3.14 \times 13.19 \times 0.6 = 49.73 \text{ m}^2/\text{s}$$

3- Lực nâng do dòng khí tác động lên trụ là:

$$F_L = L.\rho U_0 \Gamma = 9.0 \times 1.2 \times 10 \times 49.73 = 5371\text{N}$$

4- Điểm dừng

Theo 6.73 ta có điều kiện:

$$u = -2U_o.\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \Rightarrow \sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi R U_o}$$

$$\Rightarrow \theta = \arcsin\left(-\frac{\Gamma}{4\pi R U_o}\right) = \arcsin\left(-\frac{2\pi R V_\theta}{4\pi R U_o}\right) = \arcsin\left(-\frac{V_\theta}{U_o}\right)$$

$$\Rightarrow \theta = \arcsin\left(-\frac{13.19}{1.10}\right)$$

Thấy rằng có hai vị trí  $\theta_1 = 318.74^\circ$ ,  $\theta_2 = 221.26^\circ$